



## La conversione di Lambert ad una geometria dello spazio

In cammino verso un nuovo concetto di geometria nel diciottesimo secolo

Di Vincenzo De Risi

Nel diciottesimo secolo due differenti concezioni della geometria lottavano per la supremazia in Germania e in Europa. La prima di esse si fondava sulla definizione classica di geometria come scienza delle figure. Tale concezione era antica almeno quanto Euclide, ed era stata sostenuta da matematici e filosofi dall'antichità classica fino al tardo rinascimento europeo.

Ma ecco allora che un diverso concetto di geometria cominciò ad affacciarsi in alcune ardite trattazioni sulla teoria della prospettiva e del parallelismo: e apparve l'idea che la geometria potesse essere la *scienza dello spazio stesso*, e che in quest'ultimo, dunque, potesse trovarsi una struttura geometrica più fondamentale di qualsiasi triangolo o figura che si possa poi tracciare in esso. In questa nuova concezione, lo spazio cessa di essere un semplice sfondo

amorfo o un'arena concettuale (o immaginativa) nella quale la geometria propriamente detta si esercita con le sue costruzioni con riga e compasso; e diventa un oggetto geometrico vero e proprio, con autentiche proprietà matematiche.

Questa seconda idea della geometria, così moderna e gravida di futuro, fu inizialmente concepita da Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), che la sviluppò in centinaia di saggi

matematici e filosofici, che egli chiamò di *analysis situs*. E sebbene Leibniz non si risolse mai a pubblicare i propri risultati matematici sull'argomento, né essi videro la luce nel diciottesimo secolo, le sue idee filosofiche ed epistemologiche sulla necessità di una geometria dello spazio ebbero una certa diffusione. In Germania, in particolare, la recente scuola "leibniziana" di Christian Wolff (1679-1754) e dei suoi seguaci ebbe un ruolo significativo nel diffondere l'idea che la geometria dovesse considerarsi essenzialmente una scienza dello spazio. Ma tuttavia Wolff non era un matematico di sufficiente levatura per riscoprire con le proprie forze tutti quei risultati geometrici che Leibniz aveva dimostrato ma che giacevano inediti nella biblioteca di Hannover; e così egli si dovette accontentare di *dichiarare* che la geometria era scienza dello spazio, e che un'analisi accurata di questo concetto avrebbe dischiuso una tale ricchezza di note e rappresentazioni da poterci fondare sopra tutta quanta la geometria – ma poi non sapeva procedere altrimenti che ripetendo le solite definizioni e i soliti assiomi euclidei (su rette e cerchi, non sullo spazio), e costruendo con riga e compasso, uno ad uno, i soliti teoremi e problemi degli *Elementi*. La geometria dello spazio restava dunque priva di qualsiasi contenuto originale. Almeno all'inizio, dunque, ebbe facile vittoria l'"ala conservatrice" dei matematici e dei filosofi tedeschi che continuavano a considerare la geometria come una scienza di grandezze e figure, e lo spazio come un contenitore in sé stesso informe di oggetti matematici autentici.

Fra costoro, la vicenda di Johann Heinrich Lambert (1728-1777) è particolarmente significativa. I suoi primi scritti di matematica e di epistemologia mostrano chiaramente che egli

iniziò le proprie ricerche filosofiche sulla geometria attenendosi alla posizione classica euclidea, e avversando anzi esplicitamente la concezione divulgata da Wolff. La sua prima opera filosofica di certa ampiezza, il *Neues Organon* del 1764, asseriva in effetti che l'idea di spazio è *semplice* (incomposta) e che essa pertanto non può essere analizzata: era dunque scartata con decisione l'opinione che la geometria potesse consistere in un'analisi dello spazio. L'anno successivo (il 21 di aprile) Lambert scrisse a Georg Jonathan Holland che Euclide aveva fatto benissimo geometria intendendola non già come un'Analisi del concetto di spazio, ma bensì come un'Anatomia dello spazio stesso: il geometra parte dell'idea semplice di estensione e ritaglia quest'ultima in pezzi (le figure geometriche), le quali possiedono, esse, quelle proprietà geometriche che lo spazio ignora. Più oltre nel medesimo 1765 (il 13 novembre), Lambert scrisse a Kant che Wolff aveva completamente frainteso Euclide; e il 13 febbraio 1766 egli ripeteva ancora, in un'altra lettera a Kant, che il concetto di spazio è semplice e che esso non appare mai negli *Elementi* di Euclide, e a buona ragione, giacché esso è del tutto inutile al geometra.

Ma poi, improvvisamente, si assiste ad una subitanea inversione di rotta. A Lambert era capitato fra le mani un breve saggio (del 1763) del matematico Georg Simon Klügel (1739-1812), nel quale si descrivono in dettaglio una gran quantità di tentativi di dimostrazione del postulato euclideo sulle parallele. Lambert rimase affascinato dall'argomento e incominciò a studiarlo in profondità, producendo infine il proprio tentativo di prova del famoso assioma: la sua *Theorie der Parallellinien* fu scritta (presumibilmente) nel settembre 1766. Questo im-



Il matematico Luca Pacioli spiega la geometria delle proporzioni. Ritratto di attribuzione incerta.  
Fonte: Wikimedia Commons

portante scritto, d'altra parte, si concludeva in un'inequivocabile disfatta; Lambert non lo pubblicò mai, e si rassegnò a tenere il postulato sulle parallele come un principio indimostrabile della geometria. La sconfitta del matematico, però, aveva insegnato qualcosa all'epistemologo.

Occorre sapere infatti, che uno dei maggiori punti di svolta negli sviluppi della teoria del parallelismo era stato il saggio *De Postulato Quinto* (pubblicato nel 1693) del grande matematico John Wallis (1613-1703); saggio di cui Lambert venne a conoscenza, con ogni verosimiglianza, nel corso del suo proprio tentativo di dimostrazione dell'assioma euclideo.

Lì Wallis aveva dimostrato che l'assunzione del postulato sulle parallele è equivalente ad assumere la possibilità di trasformare qualsiasi figura per similitudine; dato un triangolo qualsiasi, ad esempio, è possibile costruire un altro triangolo simile ad esso (ossia un triangolo coi medesimi angoli, ma lati proporzionalmente più grandi o più piccoli), se e solo se vale il postulato sulle parallele.

Le reazioni dotte all'argomento di Wallis furono assai varie; ma in ogni caso esso dimostrava almeno una cosa, e cioè che il postulato sulle parallele, che nella formulazione di Euclide riguarda linee rette e angoli, è in effetti connesso con regioni più astratte e alquanto scon-

sciute della geometria: esso riguarda la possibilità di certe trasformazioni nello spazio, di qualsiasi figura o grandezza, e si lascia riconoscere facilmente, infine, come un autentico assioma sulla struttura dello spazio stesso. Questa presa di coscienza fu forse il maggior contributo offerto dalla dimostrazione di Wallis al diciottesimo secolo.

E' facilmente comprensibile che Lambert dovesse attribuire a questo risultato una straordinaria rilevanza epistemologica; e il suo proprio tentativo di dimostrazione puramente matematica del postulato delle parallele era forse volto anche a disinnescare la valenza "metafisica". Quando quest'ultimo fallì, e Lambert si rese conto delle conseguenze della propria sconfitta matematica, egli fu anche ben consapevole che gli era ormai impossibile considerare l'assioma di Euclide come un principio sulle rette e gli angoli: esso si era rivelato come un enunciato che afferma qualcosa sulla struttura dello spazio e delle trasformazioni geometriche; e Lambert stesso non poteva più considerare l'"estensione" come lo sfondo informale della geometria o come un'"idea semplice" priva di autentico contenuto matematico.

In un'opera successiva pubblicata nel 1771, la *Anlage zur Architektonik*, Lambert si trovò dunque costretto a trattare la geometria fornendo assiomi per lo spazio, e non più per figure e grandezze. Il secondo di questi assiomi è precisamente il postulato sulle parallele, che egli non era riuscito a dimostrare, nella formulazi-

one di Wallis: *Der Raum hat keine bestimmte Einheit...* Egli si era dunque arreso infine all'idea leibniziana di una geometria dello spazio, e non con semplici argomenti filosofici ma attraverso un complesso e fallimentare (ma straordinario) tentativo di dimostrazione matematica.

La vicenda della "conversione" di Lambert da Euclide a Leibniz è particolarmente esemplare delle relazioni fra matematica e filosofia nel diciottesimo secolo, ed è un momento importante del graduale passaggio dalla geometria classica alla moderna teoria degli spazi. Altri studiosi, sia matematici che filosofi, nei medesimi anni ma per ragioni affatto diverse, arrivarono alla medesima conclusione; e già la generazione successiva a quella di Lambert teneva ormai la definizione della geometria come scienza dello spazio così ovvia da non richiedere ulteriori spiegazioni.

Gli scopi del gruppo di ricerca sulla *Geometria moderna e il concetto di spazio* includeranno un esame esteso del ruolo di Lambert nello sviluppo concettuale della geometria nel diciottesimo secolo, come anche quello di altre figure che con altre ambizioni convergeranno nei medesimi anni verso le medesime importanti conclusioni.

Vincenzo De Risi è Direttore di Ricerca presso il MPIWG dall'Ottobre 2010 (vderisi@mpiwg-berlin.mpg.de).

The full version of this feature and more research topics are accessible at the Institute's website („News/Feature Stories“).